

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER

$$ax^2 + bx + c = 0$$

29/7/2009

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Tanım:

$a, b, c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki açık önermelere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Bu denklemi doğrulayan (eğer varsa) x değerlerinin oluşturduğu kümeye denklemin **çözüm kümesi** denir.

Çözüm kümesinin her bir elemanına denklemin bir **kökü** denir.

a, b, c sayılarına da denklemin **kat sayıları** denir.

2.dereceden bir bilinmeyenli denklemin en genel yazılışı:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kat sayı

denklemin derecesi

kat sayı

denklemin deęiřkeni
veya bilinmeyeni

kat sayı

Örnek1)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aşağıda verilen 2.dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin katsayılarını yani a, b ve c değerlerini ifade ediniz.

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$a = 2, b = 3, c = 5$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$a = 4, b = -1, c = -2$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 0$$

$$a = 1, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{5}$$

$$\sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$$

$$a = \sqrt{2}, b = -1, c = -\sqrt{5}$$

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$a = 3, b = 2, c = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = -4$$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Çözümleri

$$ax + b = 0$$

şeklinde ki denklemlere 1.dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Örnek2)

Aşağıda verilen 1.der.bir bilinmeyenli denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$\zeta = \{2\}$$

$$4x + 12 = 0$$

$$4x = -12$$

$$x = -3$$

$$\zeta = \{-3\}$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\zeta = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Örnek2)

$$x^{n-4} + x + 1 = 4n + nx$$

ifadesi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm2)

Verilen denklemi genel duruma göre düzenlersek:

$$x^{n-4} + x - nx - 4n + 1 = 0 \qquad n - 4 = 2$$

$$x^{n-4} + x(1 - n) - 4n + 1 = 0 \qquad n = 2 + 4$$

$$x^{n-4} + (1 - n)x - 4n + 1 = 0 \qquad n = 6$$

Örnek3)

$$(a - 2)x^3 + x^{a-1} + 2x^{b+1} - 3 = 0$$

denklemini x e bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

Çözüm3)

$$a - 2 = 0$$

$$a = 2$$

$$\cancel{(2 - 2)}x^3 + x^{2-1} + 2x^{b+1} - 3 = 0$$

$$x + 2x^{b+1} - 3 = 0$$

$$2x^{b+1} + x - 3 = 0$$

$$b + 1 = 2$$

$$b = 2 - 1$$

$$b = 1$$

$$a + b = 2 + 1 = 3$$



Önce doğruyu bilmek gerekir, doğru bilinirse yanlışta bilinir. Ama önce yanlış bilinirse doğruya ulaşamaz.

Farabi

Örnek4)

$$(m - 3)x^4 + kx^3 + x^{n-2} + x - 1 = 0$$

ifadesi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre, m , k ve n değerlerini bulunuz.

Çözüm4)

$$m - 3 = 0$$

$$k = 0$$

$$n - 2 = 2$$

$$m = 3$$

$$n = 2 + 2 = 4$$

İkinci Dereceden Denklemin Çözüm Kümesinin Bulunuşu

İkinci dereceden denklemlerin çözüm kümesi iki yolla bulunabilir. Bunlar **çarpanlara ayırarak** veya **diskriminant bularak** yapılan çözümlerdir.

1-) Çarpanlarına Ayırarak Denklem Çözme:

Örnek5)

$x^2 - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm5)

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2).(x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{veya} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{veya} \quad x = -2$$

$$Ç = \{-2, 2\}$$

Örnek6)

$x^2 - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm6)

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1).(x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{veya} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{veya} \quad x = -1 \quad \quad \mathcal{C} = \{-1, 1\}$$

Örnek7)

$x^2 - 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm7)

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{veya} \quad x - 2 = 0$$

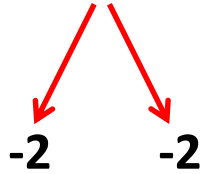
$$x = 0 \quad \text{veya} \quad x = 2 \quad \mathcal{C} = \{0, 2\}$$

Örnek8)

$x^2 - 4x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm7)

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$


$$\begin{array}{cc} & & \\ & \swarrow & \searrow \\ & -2 & -2 \end{array}$$

$$(x - 2).(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\zeta = \{2\}$$

*İşlemeyen demiri kendi pası mahveder.
İnsanı tembelliğe alışması mahveder.
(Hint atasözü)*

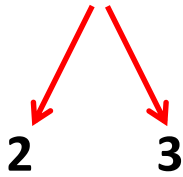


Örnek9)

$x^2 + 5x + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm9)

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$



$$(x + 2).(x + 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad x + 3 = 0$$

$$x = -2$$

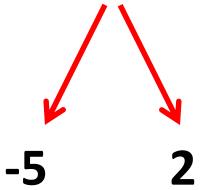
$$x = -3$$

$$\zeta = \{-2, -3\}$$

Örnek10)

$x^2 - 3x - 10 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm10)

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$


-5 2

$$(x - 5).(x + 2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x + 2 = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -2$$

$$\mathcal{C} = \{-2, 5\}$$

Örnek11)

$2x^2 - 9x - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm11)

$$2x^2 - 9x - 5 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2x & 1 \\ x & -5 \end{array}$$

$$2x \cdot (-5) + x \cdot 1 = -10x + x = -9x$$

$$(2x + 1) \cdot (x - 5) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad x - 5 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 5$$

$$\mathcal{C} = \left\{ -\frac{1}{2}, 5 \right\}$$

Örnek12)

$5x^2 + 99x - 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm12)

$$5x^2 + 99x - 20 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 5x & -1 \\ x & 20 \end{array}$$

$$5x \cdot 20 + x \cdot (-1) = 100x - x = 99x$$

$$(5x - 1) \cdot (x + 20) = 0$$

$$5x - 1 = 0 \quad x + 20 = 0$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$x = -20$$

$$\mathcal{C} = \left\{ -20, \frac{1}{5} \right\}$$

**Hiç kimse, başarı
merdivenlerine
elleri cebinde
tıрманmamıştır.**

Örnek13)

$x^2 + mx - 2m^2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm13)

$$x^2 + mx - 2m^2 = 0$$

$2m$ $-m$

$$(x + 2m).(x - m) = 0$$

$$x + 2m = 0 \quad x - m = 0$$

$$x = -2m \quad x = m$$

$$\zeta = \{-2m, m\}$$

Örnek14)

$$x^2 - nx - 6n^2 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm14)

$$x^2 - nx - 6n^2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} & \swarrow \searrow \\ -3n & 2n \end{array}$$

$$(x - 3n).(x + 2n) = 0$$

$$x - 3n = 0 \quad x + 2n = 0$$

$$x = 3n$$

$$x = -2n$$

$$\zeta = \{-2n, 3n\}$$

Örnek15)

$$2x^2 + 8 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm15)

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8$$

$$x^2 = -4$$

karesi -4 olan reel sayı yoktur.

$$\mathcal{C} = \emptyset$$

Örnek16)

$3x^2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm16)

$$3x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$\mathcal{C} = \{0\}$$

**Hayatta
muvaffak
olmak için üç
şey lazımdır:
Dikkat,
intizam,
çalışma.**



MEVİANA

2-) Diskriminantı Bularak Denklem Çözme:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

$\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere, denklemin kökleri

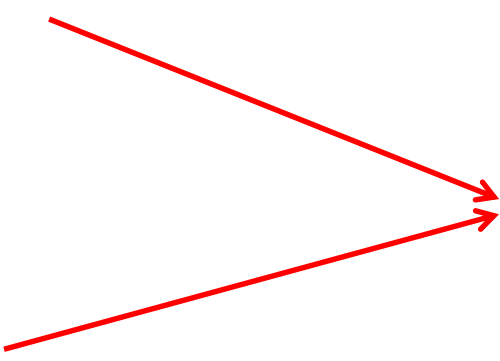
$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{veya} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{dir.}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow \text{denklem}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow \text{diskriminant}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

kökler



Örnek17)

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm17)

$$\zeta = \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$$

$$a = 2, b = 5, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Örnek18)

$3x^2 + 4x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm18)

$$\zeta = \left\{ -1, -\frac{1}{3} \right\}$$

$$a = 3, b = 4, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 + 2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 - 2}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

**Bir insanın
zekâsı,
vereceđi
karşılıklarla
deđil, soracađı
sorulardan
anlaşılır.**



Örnek19)

$x^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm19)

$$a = 1, b = 2, c = -1 \quad \mathcal{C} = \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1 + \sqrt{2})}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1 - \sqrt{2})}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ ise

kökler $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ şeklinde de ifade edilir.

Örnek20)

$x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm20)

$$a = 1, b = -3, c = 1 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \mp \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \zeta = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Kural

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ olsun

1-) $\Delta > 0$ ise, denklemin farklı iki reel kökü vardır

2-) $\Delta < 0$ ise, denklemin reel kökü yoktur.

3-) $\Delta = 0$ ise, denklemin iki kökü vardır ve bunlar eşittir.

Bu kökler, $x_1 = x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{0}}{2.a} = \frac{-b}{2a}$ dır.

Bu durumda denklem tam karedir.

Örnek21)

$2x^2 + 3x + 4 = 0$ denkleminin \mathbb{R}' de çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm21)

$$a = 2, b = 3, c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 = -23$$

$\Delta = -23 < 0$ olduğundan,

bu denklemin reel kökü yoktur. O halde, $\mathcal{C} = \emptyset$

Örnek22)

$$x^2 + 2x + m + 8 = 0$$

denkleminin eşit iki reel kökü olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm22)

$$a = 1, b = 2, c = m + 8$$

$$-4m = 32 - 4$$

$$\Delta = 0$$

$$-4m = 28$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 8) = 0$$

$$m = -7$$

$$4 - 4m - 32 = 0$$

Örnek23)

$$x^2 + 2x + 2m - 7 = 0$$

denkleminin **reel kökü olmadığına** göre, m nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm23)

$$a = 1, b = 2, c = 2m - 7$$

$$\Delta < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 7) < 0$$

$$4 - 4(2m - 7) < 0$$

$$4 - 8m + 28 < 0$$

$$-8m < -28 - 4$$

$$-8m < -32$$

$$m > 4$$

4 den büyük olan en küçük tam sayı 5 tir.

Örnek24)

$$x^2 - 4x - 3m = 0$$

denkleminin **reel kökü olmadığına** göre, m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm24)

$$a = 1, b = -4, c = -3m$$

$$\Delta < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3m) < 0$$

$$16 - 4(-3m) < 0$$

$$16 + 12m < 0$$

$$12m < -16$$

$$m < -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$$

$$m < -\frac{4}{3}$$

$-\frac{4}{3}$ den küçük olan en büyük tam sayı -2 dir.

Örnek25)

$$x^2 - 2x + m + 3 = 0$$

denkleminin eşit iki reel kökü olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm25)

$$a = 1, b = -2, c = m + 3$$

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 3) = 0$$

$$4 - 4m - 12 = 0$$

$$-4m = 12 - 4$$

$$-4m = 8$$

$$m = -2$$

İKİNCİ DERECEDEEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN KÖKLERİ İLE KAT SAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ denkleminde } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{kökler } x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olduğunu biliyoruz,}$$

Kökler Toplamı:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} \\ &= \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Sonuç:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Örnek1)

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ise $x_1 + x_2$ kaçtır?

Çözüm1) 1.Yol:

$x^2 + 5x + 6 = 0$ denkleminin köklerini çarpanlarına ayırarak bulabiliriz.

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad x + 3 = 0$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -3 \quad x_1 + x_2 = (-2) + (-3) = -5$$

2.Yol:

$$a = 1, b = 5, c = 6 \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$$

Kökler Çarpımı:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{c}{a}$$

Sonuç:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Örnek2)

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ise $x_1 \cdot x_2$ kaçtır?

Çözüm1) 1.Yol:

$x^2 - 3x - 10 = 0$ denkleminin köklerini çarpanlarına ayırarak bulabiliriz.

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x + 2 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-5) \cdot 2 = -10$$

2.Yol:

$$a = 1, b = -3, c = -10$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-10}{1} = -10$$

Köklerin Mutlak Değerce Farkı:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Sonuç:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Örnek3)

$$3x^2 + 8x - 1 = 0$$

denkleminin köklerinin farkının mutlak değerini bulunuz.

Çözüm3)

$3x^2 + 8x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun,

$$a = 3, b = 8, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 64 + 12 = 76$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{76}}{|3|} = \frac{\sqrt{76}}{3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{denkleminde}$$

Kökler Toplamı:



$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Kökler Çarpımı:



$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Köklerin Mutlak Değerce Farkı:



$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun,

Köklerin Kareleri Toplamı:



$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

Köklerin Küpleri Toplamı:



$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

Köklerin Terslerinin Toplamı:



$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c}$$

Örnek4)

$$5x^2 - 6x - 1 = 0$$

denkleminin kökler toplamını, kökler çarpımını ve köklerin terslerinin toplamını bulunuz.

Çözüm4)

$$a = 5, b = -6, c = -1$$

kökler x_1, x_2 ise

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{5} = \frac{6}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{5}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -\frac{-6}{-1} = -6$$

Örnek5)

$$2x^2 + 6x + 3 = 0$$

denkleminin kökler toplamını, kökler çarpımını ve köklerin mutlak değerce farkını bulunuz.

Çözüm5)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Örnek6)

$-x^2 + 3x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. $x_1 > x_2$ ise

$x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm6)

$$a = -1, b = 3, c = -1$$

$$x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 (x_1 - x_2) = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{\sqrt{5}}{|-1|} = \sqrt{5}$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 9 - 4 = 5$$

Örnek7)

$$mx^2 - 3mx + 1 = 0$$

denkleminin kökleri arasında

$$3x_1 - x_2 = 5 \quad \text{bağıntısı varsa } m \text{ kaçtır?}$$

Çözüm7)

Örnek8)

$$nx^2 + 5nx - 1 = 0$$

denkleminin kökleri arasında

$$2x_1 - x_2 = -1 \quad \text{bağıntısı varsa } n \text{ kaçtır?}$$

Çözüm8)

Örnek9)

$$3x^2 - 6x + 2m - 3 = 0$$

denkleminin kökleri arasında $2x_1 - 3x_2 = -6$ bağıntısı varsa m kaçtır?

Örnek10)

$$(2m + 2)x^2 + (4 - 4m)x + m - 2 = 0$$

denkleminin kökleri arasında $x_1 = \frac{1}{x_2}$ bağıntısı varsa $x_1 + x_2$ kaçtır?

Örnek11)

$3x^2 - (m + 2)x - m = 0$ denkleminde,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2 \quad \text{ise, } m \text{ kaçtır?}$$

Örnek12)

$$x^2 - mx - 8 = 0$$

denkleminin köklerinden biri, diğerinin karesine eşittir. Buna göre, m kaçtır?

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemi Kurma:

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem,

$$(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0 \quad \text{dir.}$$

Örnek1)

Kökleri 2 ve 3 olan ikinci dereceden denklemi kurunuz.

Çözüm1)

$$(x - 2).(x - 3) = 0$$

veya

$$x^2 - (2 + 3)x + 2.3 = 0$$

$$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Örnek2)

Kökleri 3 ve -2 olan ikinci dereceden denklemi kurunuz.

Çözüm2)

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (3 - 2)x + 3 \cdot (-2) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Örnek3)

Kökleri -1 ve -4 olan ikinci dereceden denklemi kurunuz.

Çözüm3)

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (-1 - 4)x + (-1) \cdot (-4) = 0$$

$$x^2 - (-5)x + 4 = 0$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

Örnek4)

Kökleri $-\frac{1}{2}$ ve 3 olan ikinci dereceden denklemini kurunuz.

Çözüm4)

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2} + 3\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{her iki tarafı 2 ile çarpalım:}$$

$$2 \cdot \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot 0 \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Örnek5)

Çözüm kümesi $\zeta = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm5)

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_1 + x_2 = (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 2$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = (1 - \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (2)x + (-1) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Örnek6)

Çözüm kümesi $\zeta = \{-2m\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm6)

$$x_1 = -2m$$

$$x_1 + x_2 = (-2m) + (-2m) = -4m$$

$$x_2 = -2m$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-2m) \cdot (-2m) = 4m^2$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (-4m)x + 4m^2 = 0$$

$$x^2 + 4mx + 4m^2 = 0$$

İkinci Dereceye Dönüştürülebilen Denklemler

1-) Polinomların Çarpımı veya Bölümü Şeklindeki Denklemler:

$P(x).Q(x) = 0$ ise, $P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0$ dır.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ ise, $P(x) = 0$ veya $Q(x) \neq 0$ dır.

Örnek1)

$x^3 + 6x^2 + 5x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm1)

$$x(x^2 + 6x + 5) = 0$$

$$x(x + 5).(x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{llll} x = 0 & x + 5 = 0 & x + 1 = 0 & \mathcal{C} = \{0, -5, -1\} \\ & x = -5 & x = -1 & \end{array}$$

Örnek2)

$x^3 - 4x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm2)

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x - 2).(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad x - 2 = 0 \quad x + 2 = 0 \quad \mathcal{C} = \{0, 2, -2\}$$
$$x = 2 \quad x = -2$$

Örnek3)

$$\frac{x^2 - 9}{x + 2} = 0 \quad \text{denkleminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

Çözüm3)

$$\frac{x^2 - 9}{x + 2} = 0 \quad \text{ise} \quad x^2 - 9 = 0 \quad \text{ve} \quad x + 2 \neq 0 \quad \text{dır.}$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x + 2 \neq 0$$

$$(x - 3).(x + 3) = 0$$

$$x \neq -2$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

$$\mathcal{C} = \{-3, 3\}$$

Örnek4)

$$\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15} = 0 \quad \text{denkleminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

Çözüm4)

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{ve} \quad x^2 - 8x + 15 \neq 0 \quad \text{dır.}$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 \neq 0$$

$$(x + 4).(x - 3) = 0$$

$$(x - 3).(x - 5) \neq 0$$

$$x = -4 \quad x = 3$$

$$x \neq 3 \quad x \neq 5$$

$$\mathcal{C} = \{-4\}$$

2-) Değişken Değiştirilerek Çözülen Denklemler

Örnek1)

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm1)

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 = u \quad \text{olsun}$$

$$u^2 - 13u + 36 = 0$$

$$(u - 4).(u - 9) = 0$$

$$(x^2 - 4).(x^2 - 9) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2).(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 2 \quad x = -2 \quad x = 3 \quad x = -3$$

$$\mathcal{C} = \{-3, -2, 2, 3\}$$

Örnek2)

$$(x^2 - 3)^2 + 3(x^2 - 3) - 4 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm2)

$$x^2 - 3 = u \quad \text{olsun}$$

$$u^2 + 3u - 4 = 0$$

$$(u + 4).(u - 1) = 0$$

$$(x^2 - 3 + 4).(x^2 - 3 - 1) = 0$$

$$(x^2 + 1).(x^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 + 1).(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\emptyset \quad x = 2 \quad x = -2$$

$$\mathcal{C} = \{-2, 2\}$$

Örnek3)

$$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0 \quad \text{denkleminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

Çözüm3)

$$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$

$$3^x = u \quad \text{olsun}$$

$$u^2 - 12u + 27 = 0$$

$$(u - 3) \cdot (u - 9) = 0$$

$$(3^x - 3) \cdot (3^x - 9) = 0$$

$$3^x - 3 = 0$$

$$3^x = 3$$

$$3^x = 3^1$$

$$x = 1$$

$$3^x - 9 = 0$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

$$\mathcal{C} = \{1, 2\}$$

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

a, b, c, d, e, f birer reel sayı ve a, b, c sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı olmak üzere,

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli** denklem denir.

En az bir tanesi ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem olan iki ya da daha fazla denklemden oluşan sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Örnek1)

$$x + y = 8$$

$$x^2 - y^2 = 16$$

olduğuna göre, $x - y$ farkını bulunuz.

Örnek2)

$$2x + y - 3 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2xy - 7 = 0$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek3)

$$3x^2 + 2y^2 = 14$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek4)

$$x + 2y = 8$$

$$x^2 - 4y^2 = 16$$

olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek5)

$$x \cdot y = 64$$

$$x + y = 20$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek6)

$$x \cdot y = 10$$

$$x + y = 7$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek7)

$$x^2 + y^2 = 208$$

$$x \cdot y = 96$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek8)

$$2x + y = 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Köklü Denklemler

Ders kitabımızda sayfa 70 deki alıştımlar:

Örnek: Aşağıda verilen köklü denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\sqrt{3x^2 + 4} = 2x - 3$

b) $\sqrt[4]{x - 1} = 1$

$$c) \sqrt{x+4} = 5$$

$$ç) \sqrt{2 + \sqrt{3+x}} = 7$$

d) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-8} = 4$

e) $\sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{4x+1}$

$$\mathbf{f)} \quad \sqrt{2x - 11} + 4 = \sqrt{4x + 1}$$

$$\mathbf{g)} \quad \sqrt{2 + x} - 2 = -5$$

Mutlak Değerli Denklemler

Ders kitabımızda sayfa 71 deki alıştırmalar:

Örnek: Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$

b) $|x^2 - 2x + 3| = |x - 1|$

c) $|x - 2| = 7$

d) $2 \cdot |x + 3| - 6 = 12$

$$\mathbf{e)} \quad 5 - |x + 2| = 2x$$

$$\mathbf{f)} \quad 2x - |x + 2| = 10$$

$$\mathbf{g)} \quad |x|^2 + |x| - 6 = 0$$

$$\mathbf{ğ)} \quad |x + 1| - |x| = 2$$

