

DÜZGÜN DAİRESEL HAREKET

Çevremize baktığımızda, tam daire ya da kısmen daire hareketi yapan çok şey görebiliriz. Mesela: Lunaparkta dönen dönme dolaplar, arabanın viraj alması, çamaşır makinesinin kazanının dönmesi, dişlilerin dönmesi, mikro alemde elektronların çekirdek etrafında dönmesi, makro alemde Ay'ın Dünya etrafında, Dünya'nın ve gezegenlerin hem kendi etraflarında hem de Güneş'in çevresinde dolanmaları bir nevi dairesel harekettir.



Sabit bir kuvvet, büyüklüğü değişmeyen hız vektörüne sürekli ve dik olarak etki ederse, cisme r yarıçaplı bir çember üzerinde düzgün dönme hareketi yaptırır. Böyle bir hareket düzgün dairesel harekettir. Bir başka ifadeyle; daire üzerinde eşit zaman aralıklarında, eşit yol alan hareketlinin hareketine **düzgün dairesel hareket** denir.

DÜZGÜN DAİRESEL HAREKETTE TEMEL KAVRAMLAR

Periyot (T)

Düzgün dairesel hareketlinin bir tam tur dönmesi için geçen zamana **periyot** denir. Birimi **saniye**dir.

Frekans (f)

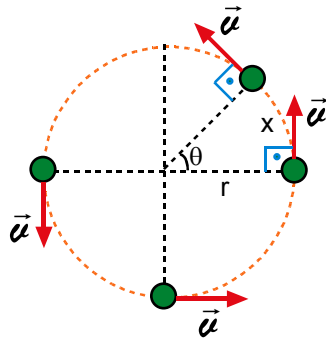
Düzgün dairesel hareketlinin birim zamandaki tur sayısına **frekans** denir. Birimi **1/s** ya da **Hertz (Hz)** dir.

Periyot ile frekans arasında,

$$T \cdot f = 1 \quad \text{bağıntısı vardır.}$$

Çizgisel Hız (u)

Düzgün dairesel hareket yapan bir cismin daire üzerinde birim zamanda aldığı yola **çizgisel hız** denir. Birimi **m/s** dir. Daireye daima teğet olup, yarıçap vektörüne diktir.



Düzgün doğrusal harekette yol ifadesi,

$$x = u \cdot t \quad \text{idi.}$$

Bu bağıntıda $x = 2\pi r$ olursa, $t = T$ olur. Bu iki eşitlik yol ifadesinde yerine yazılırsa,

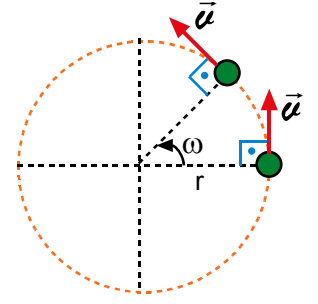
$$2\pi r = u \cdot t$$

$$u = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \cdot r \cdot f$$

olur.

Açısal Hız (ω)

Düzgün dairesel hareket yapan bir cismin, yarıçap vektörünün birim zaman içinde daire düzleminde taradığı açıya **açısal hız** denir. Birimi **rad/s** dir.



Yarıçap vektörü bir tam devir yaptığında, 2π radyan açıyı T sürede tarayacağından; çembersel hareket yapan cismin açısal hızı;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad \text{olur.}$$

Çizgisel hız ile açısal hız arasındaki ilişki ise;

$$u = \omega \cdot r \quad \text{olur.}$$

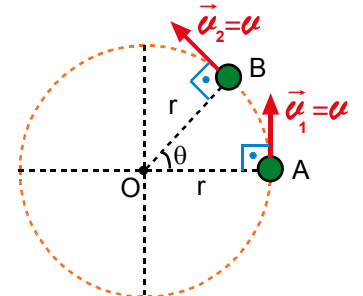
Merkezcil İvme (a)

Düzgün dairesel hareket yapan cismin hız vektörü yön değiştirince vektörel hızda bir değişme meydana gelir. Buna göre hız vektörünün değişmesi yönünde cisim ivme kazanacaktır. Bu ivmenin yönü daima dairenin merkezine doğru yöneldiği için **merkezcil ivme** adını alır.

✓ Düzgün dairesel harekette **ortalama ivme**;

$$\vec{a}_{\text{ort}} = \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{\vec{a}_2 - \vec{a}_1}{\Delta t}$$

ilişkisi ile bulunur.

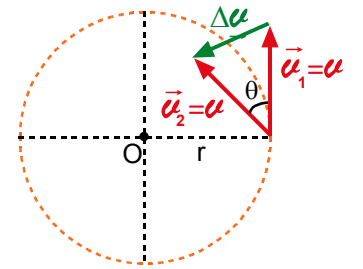


Şekil-1

✓ **Merkezcil ivmenin büyüklüğü** ise;

$$a = \frac{u^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

ilişkisi ile bulunur.



Şekil-2

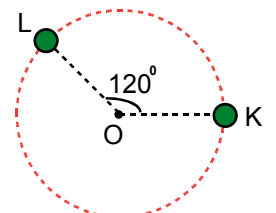
ÖRNEK :

Bir cisim O noktası etrafında 10 m yarıçaplı dairesel hareket yapıyor.

Hareketin periyodu 3 s olduğuna göre;

a) Cismin merkezcil ivmesi kaç m/s^2 dir?

b) KL arası ortalama ivmesi kaç m/s^2 dir? ($\pi=3$ alınınız.)



(a) $40 m/s^2$; b) $20\sqrt{3} m/s^2$)

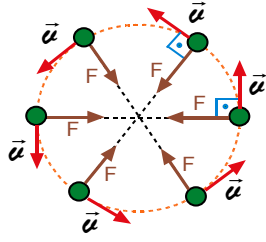
MERKEZCİL KUVVET

Cismin dairesel yörüngede sabit hızla dönmesini sağlayan ve merkeze yönelmiş kuvvete **merkezcil kuvvet** denir.

Dinamiğin temel prensibine göre kuvvet ; $F = m.a$ şeklinde yazılabilir.

Bu eşitlikte ivme değeri yerine yazılırsa merkezcil kuvvetin büyüklüğü;

$$F = \frac{m.v^2}{r} = m.\omega^2.r$$



olarak yazılır.

Bu kuvvet;

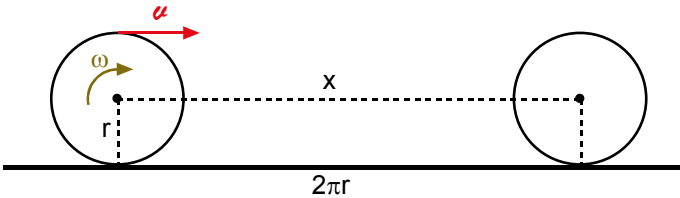
- ✓ İvme ile aynı yönlüdür, daima merkeze doğrudur.
- ✓ Her an çizgisel hızla diktir.
- ✓ Doğrultusu sürekli olarak değişir.
- ✓ Şiddeti sabit $m.\omega^2.r$ dir.

Dairesel harekette **merkezkaç kuvveti** adı verilen bir kuvvet daha vardır. Ancak Newton kanunlarının geçerli olduğu bir referans sisteminde böyle bir kuvvet yoktur. Bu kuvvet, dönen bir referans sistemindeki bir gözlemcinin Newton kanunlarını uygulayabilmek için uydurmak zorunda kaldığı hayali bir kuvvettir. Büyüklüğü merkezcil kuvvete eşit, yönü bu kuvvete ters yöndedir. Merkezkaç kuvveti eylemsizlik kuvvetinin bir sonucudur. Bir arabanın virajı alırken, dışa doğru savrulduğunu hissetmemiz buna iyi bir örnektir. Hareketli sistemin dışından bakan gözlemci için sadece merkezcil kuvvet vardır.

YUVARLANMA HAREKETİ

Öteleme ve dönme hareketinin bileşkesine **yuvatlanma hareketi** denir.

Cisim döndüğü için ilerliyorsa yuvatlanma hareketi yapar. Bu durumda kütle merkezi de yol almış olur.



Şekilde görüldüğü gibi bir çemberin kütle merkezi etrafında ω açısal hızıyla dönerek ilerlediğini kabul edelim. Çember bir tam tur yaptığında kütle merkezinin aldığı yol,

$$x = 2\pi r \text{ dir.}$$

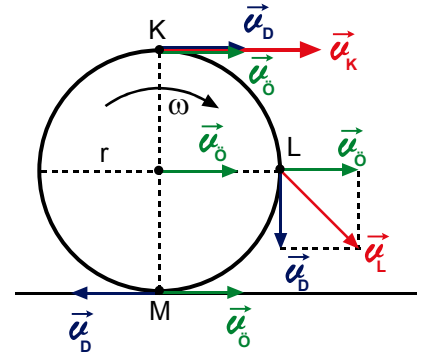
Geçen zaman $t = T$ dir.

Kütle merkezinin hızı,

$$v_{km} = \frac{x}{t} = \frac{2.\pi.r}{T} = \omega.r \text{ olur.}$$

Demek ki, kütle merkezinin ilerleme hızı ile çember üzerindeki bir noktanın çizgisel hızı eşittir.

Yuvarlanan bir cismin her hangi bir noktasındaki anlık hızları öteleme hızı ile dönme hızının bileşkesidir. Şekilde görülen çemberin K, L ve M noktalarındaki anlık hızları;



$$\vec{v} = \vec{v}_D + \vec{v}_O \text{ ile hesaplanır.}$$

K noktası için; $v_K = \omega r + \omega r = 2\omega r$

L noktası için; $v_L^2 = v_D^2 + v_O^2$
 $v_L = \omega.r.\sqrt{2}$

M noktası için; $v_M = \omega r - \omega r$

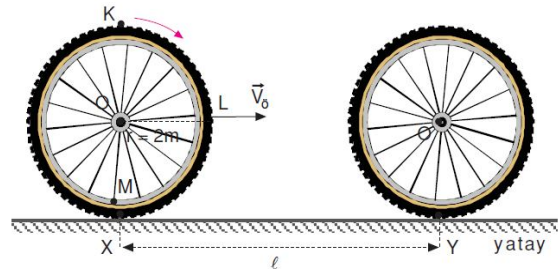
$$v_M = 0 \text{ olur.}$$

Hızlar karşılaştırılacak olursa; $v_K > v_L > v_M$ dir.

Yuvarlanma hareketinde;

- ✓ Değme noktasına göre bütün noktaların açısal hızları aynıdır.
- ✓ Kütle merkezinin sadece öteleme hızı vardır.

ÖRNEK :



Yarıçapı 2 m olan bir dairesel cisim doğrusal bir yolda 4 s periyotta dönerek ilerlemektedir. Cisim ilk konumunda iken;

- a) K noktasının hızı kaç m/s dir?
- b) L noktasının hızı kaç m/s dir?
- c) M noktasının hızı kaç m/s dir?
- d) Cisim 2 tur attığında X noktasından Y noktasına geldiğine göre, l uzaklığı kaç m dir?
- e) O noktasının hızı kaç m/s dir?

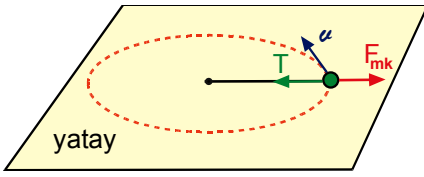
($\pi=3$ alınız.)

(a) 6 m/s ; b) $3\sqrt{2}$ m/s ; c) 0 ; d) 24 m ; e) 3 m/s)

DAİRESEL HAREKETİN UYGULAMALARI

Yatay Düzlemde Düzgün Dairesel Hareket

Bir cismi bir ipe bağlayıp ona yatay düzlemde düzgün dairesel hareket yaptırdığımızda, ipteki gerilme daima sabit ve merkezkaç kuvvete eşittir.

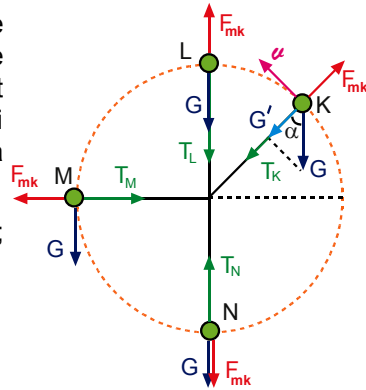


$$T = F_{mk} = m \frac{v^2}{r}$$

İpte oluşan gerilme kuvveti bu durumda cismin ağırlığına bağlı değildir. Çünkü cismin ağırlığı masanın tepki kuvveti ile dengelenecektir.

Düşey Düzlemde Düzgün Dairesel Hareket

Bir cismi ipe bağlayıp düşey düzlemde düzgün dairesel hareket yaptırırsak ip gerilmesi sürekli değişir. Mesela şekildeki;



✓ K noktasındaki ip gerilmesi;

$$T_K = F_{mk} - G'$$

$$T_K = F_{mk} - G \cdot \cos \alpha$$

✓ L noktasındaki ip gerilmesi;

$$T_L = F_{mk} - G \quad (\text{en küçük gerilmedir})$$

✓ M noktasındaki ip gerilmesi;

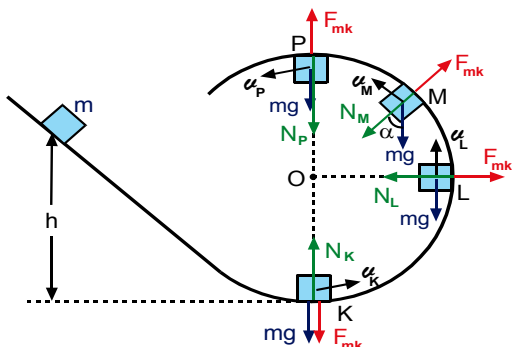
$$T_M = F_{mk}$$

✓ N noktasındaki ip gerilmesi;

$$T_N = F_{mk} + G \quad (\text{en büyük gerilmedir})$$

Ray Sisteminde Dairesel Hareket

Şekildeki sürtünmesiz sistemde h yüksekliğinden serbest bırakılan m kütleli cisim hızlanarak K noktasından geçip şekildeki yörüngeyi izler. Cisim bundan sonra düşey düzlemde dairesel harekete benzeyen bir hareket yapar. Tek farkı cismin hızı burada her noktada değişir ve ipteki gerilme kuvveti yerine rayın tepki kuvveti gelir.



$$K \text{ noktası : } N_K = mg + F_{mk} = mg + \frac{m \cdot v_K^2}{r}$$

$$L \text{ noktası : } N_L = F_{mk} = \frac{m \cdot v_L^2}{r}$$

$$M \text{ noktası : } N_M + mg \cdot \cos \alpha = F_{mk}$$

$$N_M = F_{mk} - mg \cdot \cos \alpha$$

$$P \text{ noktası : } N_P + mg = F_{mk} \Rightarrow N_P = F_{mk} - mg$$

✓ Maksimum tepki kuvveti en alt noktada (K), minimum tepki kuvveti ise en üst noktada (P) oluşur.

✓ Cismin ray sisteminde hareketini sürdürebilmesi için en üst noktada $F_{mk} \geq mg$ olmalıdır.

Düz Yolda Emniyetli Viraj Şartı

v hızıyla viraja giren bir araca etkiyen merkezkaç kuvvet, yol ile tekerlekler arasındaki sürtünme kuvvetinden büyük olmamalıdır. Merkezkaç kuvvet sürtünme kuvvetinden daha büyük olursa, araç devrilir veya kayar.

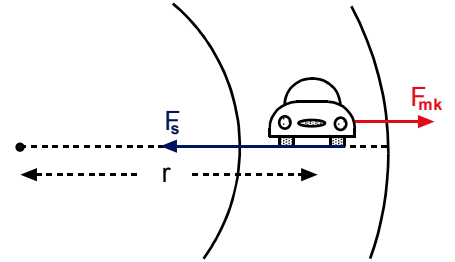
$$F_s \geq F_{mk}$$

$$k \cdot m \cdot g \geq \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$k \cdot g \cdot r \geq v^2$$

$$\sqrt{k \cdot g \cdot r} \geq v$$

bulunur.



Eğimli Yolda Emniyetli Viraj Şartı

Sürtünme kuvvetine her zaman güvenilemeyeceğinden genellikle virajlı yollara eğim verilir.

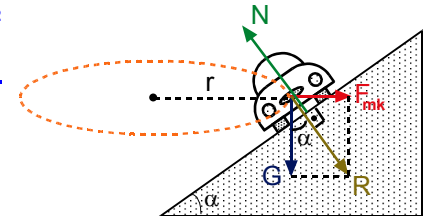


Viraja giren aracın emniyetle dönebilmesi için merkezkaç kuvvetle aracın ağırlığının bileşkesi yola dik olmalıdır.

$$\tan \alpha = \frac{F_{mk}}{G} = \frac{\frac{m \cdot v^2}{r}}{m \cdot g}$$

$$v^2 = r \cdot g \cdot \tan \alpha$$

$$v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$$



Bu ifade aracın kaymadan güvenli viraj alabilmesi için hızın değerini verir. Hız bundan büyük olursa araç yukarı doğru, küçük olursa aşağı doğru kayar. (Burada ortamın sürtünmesiz kabul edildiğine dikkat ediniz.)

Silindir İçinde Dönen Bir Cismin Düşmemesi Şartı

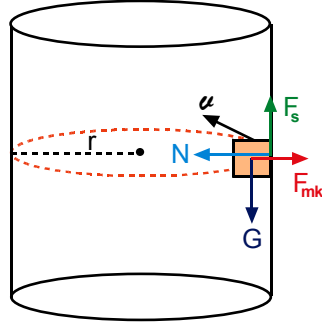
Şekilde görülen cismin aşağıya düşmemesi için $F_s \geq G$ olmalıdır.

$$F_s = k.N = k.F_{mk} = k.m \frac{u^2}{r}$$

$G = m.g$ olduğundan,

$$k.m \frac{u^2}{r} \geq m.g$$

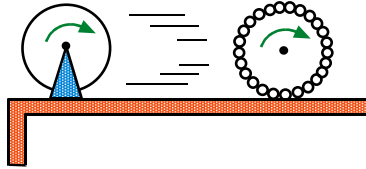
cismin hızı, $u \geq \sqrt{r.g/k}$ olmalıdır.



Merkezkaç Kuvvetinin Başka Bazı Sonuçları

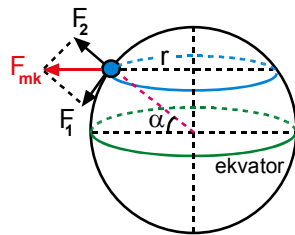
✓ Bir motorun eksenine bağlanarak çok hızlı döndürülen dairesel bir kağıt levha, merkezkaç kuvvetler etkisinde o kadar gerilir ve sertleşir ki, onu döner testere gibi kullanarak küçük tahta parçalarını kesmek mümkün olur.

✓ Bir motorun eksenine takılmış kasnakta bulunan zincir, dönme esnasında kasnaktan kurtulursa, sanki sert bir çember gibi zeminde yuvarlanır gider. Ancak zincirin hızı azaldıkça, onu böyle çember şeklinde tutan merkezkaç kuvvetler azalır ve zincir gevşeyerek tekrar külçe haline gelir.



Onun için pervaneler, çok hızlı arabaların tekerlekleri, döndükleri açısal hızın gerektirdiği sağlamlığa sahip bir malzemeden yapılmalıdır. Aksi takdirde merkezkaç kuvvetlerin etkisiyle parçalanabilirler.

✓ Dünya üzerindeki m kütleli bir cisim α enleminde iken Dünya'nın kendi eksenini etrafında dönmesinden dolayı F merkezkaç kuvvetinin etkisinde kalır. Bu merkezkaç kuvvetin F_2 bileşeni Dünya'nın çekim kuvvetiyle zıt yönlü olduğu için cismin ağırlığı azalır.



F_1 bileşeni ise küreye teğet olup cisimleri ekvatora doğru sürüklemeye çalışan bir kuvvettir. Bu kuvvet karalardaki cisimleri sürüklemeye kâfi gelmediği halde sulara yüzen cisimleri sürükleyecek kadar etkilidir. Kutuplardan kopan buz dağlarının ekvatora doğru sürüklenmesinin sebebi budur. Su dolu bir küvetin veya lavabonun tıkaçı açıldığında, suyun dönerek boşalmasının da sebebi budur.